

Лабораторная работа 154

Изучение распределения молекул газа по скоростям на механической модели

Приборы и принадлежности: лабораторная установка, набор металлических сеток, воронка, крупа.

Краткая теория

Рассмотрим газ, находящийся в состоянии термодинамического равновесия и состоящий из достаточно большого количества молекул. Молекулы такого газа движутся с разными скоростями, изменяющимися при соударениях. Однако можно следить не за движением отдельных молекул, а затем, какое их количество имеет конкретные значения модуля скорости. Тогда окажется, что **число молекул, скорость которых принадлежит интервалу с произвольными границами V_1 и V_2 ($V_1 < V < V_2$), практически не изменяется с течением времени, хотя всякий раз это будут другие молекулы.** Интервал может быть любым, в том числе и бесконечно узким, имеющим границы V и $V + dV$ (рис. 1).

Пусть $dN(V)$ — количество молекул, скорость которых принадлежит интервалу с границами V и $V + dV$. Как уже отмечалось, $dN(V)$ не зависит от времени. Однако понятно, что это количество молекул пропорционально как ширине рассматриваемого интервала скоростей dV , так и общему количеству молекул N , то есть $dN(V) \sim N \cdot dV$. Чтобы перейти от пропорциональности к равенству нужно ввести коэффициент пропорциональности $f(V)$, который зависит от границ рассматриваемого интервала, то есть является функцией скорости. Таким образом,

$$dN(V) = f(V) \cdot N \cdot dV, \quad (1)$$

или

$$f(V) = \frac{dN(V)}{N \cdot dV}. \quad (2)$$

Функция $f(V)$, определяемая формулой (2), **называется функцией распределения молекул по скоростям.** Из нее следуют:

1. условие нормировки

$$\int_0^{\infty} f(V) dV = 1; \quad (3)$$

2. формула для расчета количества молекул, скорость которых больше V_1 , но меньше V_2

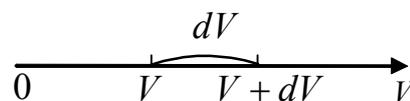


Рис. 1. Интервал значений скорости шириной dV .

$$\Delta N(V_1, V_2) = N \cdot \int_{V_1}^{V_2} f(V) \cdot dV ; \quad (4)$$

3. формула для расчета средней скорости молекул

$$\langle V \rangle = \int_0^{\infty} V \cdot f(V) dV ; \quad (5)$$

4. формула для расчета квадрата средней скорости

$$\langle V^2 \rangle = \int_0^{\infty} V^2 \cdot f(V) dV . \quad (6)$$

Сначала докажем формулу (4). Для этого интервал значений скорости с границами V_1 и V_2 представим как совокупность бесконечно узких интервалов шириной dV (рис. 2), каждому из которых соответствует количество молекул $dN(V)$. Искомая величина $\Delta N(V_1, V_2)$ — это общее количество молекул, скорости которых принадлежат всем рассматриваемым бесконечно узким интервалам. Поэтому

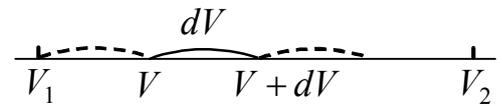


Рис. 2. Область интегрирования.

$$\Delta N(V_1, V_2) = \int_1^2 dN , \quad (7)$$

где точка 1 соответствует скорости V_1 , а точка 2 — скорости V_2 . Представляя в (7) dN в виде (1), получаем формулу (4).

Для доказательства условия нормировки (3) воспользуемся формулой (4) при $V_1 = 0$ и $V_2 = \infty$. Тогда слева в (4) получим общее количество молекул газа

N , то есть $N = N \cdot \int_0^{\infty} f(V) dV$. Сокращая в полученном равенстве N , придем к

условию нормировки (3).

Формулы для расчета средних значений (5) и (6) проще понять, если сначала рассмотреть гипотетический дискретный закон распределения молекул по скоростям, в соответствии с которым значение скорости V_i имеют N_i молекул из общего количества N . Тогда средняя скорость

$$\langle V \rangle = \frac{\sum_i N_i V_i}{N} = \sum_i \left(\frac{N_i}{N} \right) \cdot V_i , \quad (8)$$

где в сумме присутствуют все возможные значения скорости V_i . При переходе от дискретного к непрерывному распределению молекул по скоростям доля молекул с заданной скоростью $\frac{N_i}{N}$ представляется в виде $\frac{dN(V)}{N} = f(V) dV$ (см. (2)), возможным значением скорости вместо V_i становится V , а суммирование заменяется интегрированием по всему диапазону возможных значений скоро-

стей. В результате формула (8) принимает вид (5).

Аналогично, заменяя в (8) V_i на V_i^2 и $\langle V \rangle$ на $\langle V^2 \rangle$, можно пояснить формулу (6).

Для идеального классического газа, которым можно считать любой газ при температуре и давлении близких к нормальным, функция распределения молекул по скоростям имеет следующий вид:

$$f(V) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} V^2 e^{-\frac{m_0 V^2}{2kT}}, \quad (9)$$

где m_0 — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Эта функция была теоретически получена Максвеллом и поэтому называется **распределением Максвелла**. Для двух температур ($T_2 > T_1$) распределение Максвелла графически представлено на рис. 3. Оно имеет максимум и стремится к нулю при $V \rightarrow 0$ и $V \rightarrow \infty$. Скорость $V_в$, при которой распределение Максвелла имеет максимум, называется **наиболее вероятной**. На рис. 3. отмечены значения наиболее вероятной скорости, соответствующие температурам T_1 (слева) и T_2 (справа).

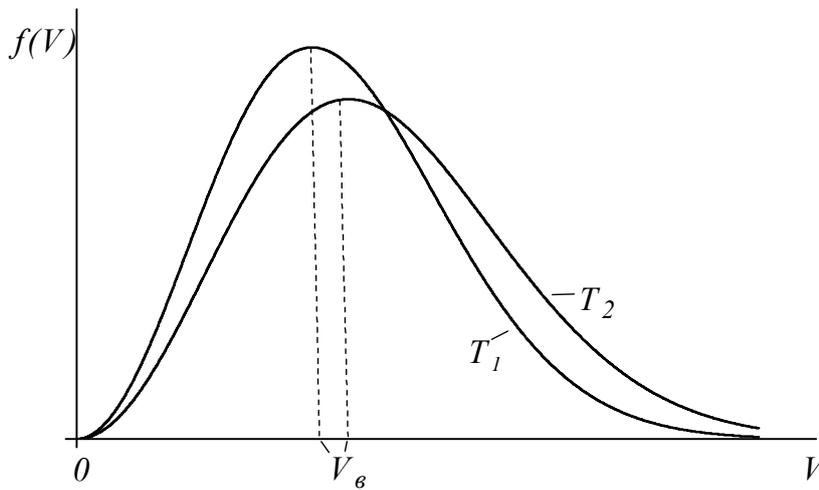


Рис. 3. Распределение Максвелла.

рам T_1 (слева) и T_2 (справа). Смысл названия в том, что согласно (1)

$f(V) \sim \frac{dN(V)}{N}$, то есть скорость близкую к той, при которой функция $f(V)$ максимальна, имеет наибольшая доля молекул. Наиболее вероятная скорость $V_в$

удовлетворяет уравнению $\frac{df(V)}{dV} = 0$, из которого после подстановки (9) следует формула

$$V_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (10)$$

В соответствии с формулой (10) при повышении температуры газа максимум распределения Максвелла смещается в сторону больших скоростей пропорционально \sqrt{T} . При этом площадь под кривой не изменяется, так как она равна интегралу $\int_0^{\infty} f(V)dV$, который согласно условию нормировки (3) равен

единице. Кроме того повышение температуры газа сопровождается понижением максимума распределения Максвелла и увеличением доли молекул, имеющих большие скорости (рис. 3).

Подстановка (9) в (5) и (6) позволяет найти *среднюю скорость* $\langle V \rangle$, среднее значение квадрата скорости $\langle V^2 \rangle$, а значит и *среднюю квадратичную скорость* $V_{кв} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$ *идеального классического газа*:

$$\langle V \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}, \quad V_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что $V_e < \langle V \rangle < V_{кв}$, причем средняя квадратичная скорость превосходит наиболее вероятную примерно в 1,23 раза.

Теперь рассмотрим гипотетический идеальный газ, скорость молекул которого может иметь только две компоненты (например, V_x и V_y). Для такого газа функция распределения молекул по скоростям имеет следующий вид:

$$f^*(V) = \frac{m_0 V}{kT} e^{-\frac{m_0 V^2}{2kT}}. \quad (12)$$

Для двух температур ($T_2 > T_1$) эта функция графически представлена на рис. 4.

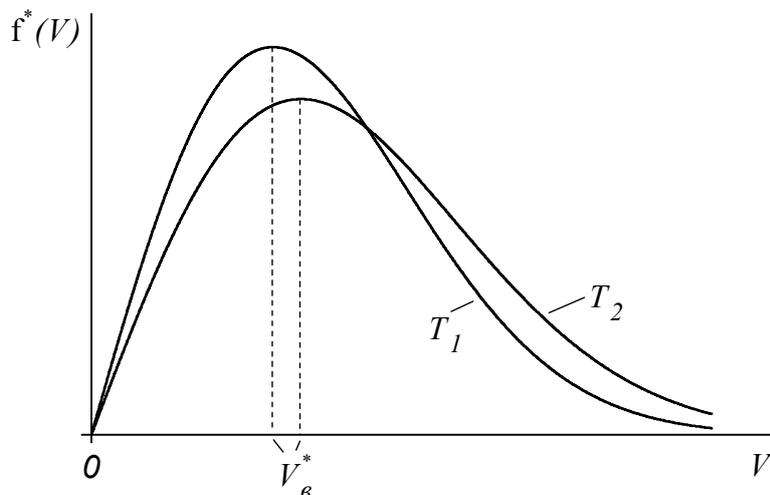


Рис. 4. Двумерная функция распределения.

Как и распределение Максвелла (9) она имеет максимум. Однако этому максимуму теперь соответствует другая наиболее вероятная скорость:

$$V_e^* = \sqrt{\frac{kT}{m_0}}. \quad (13)$$

Комплекс $\frac{m_0}{kT}$ в (12) выразим через наиболее вероятную скорость,

воспользовавшись для этого формулой (13). В результате получим следующее представление двумерной функции распределения:

$$f^*(V) = \frac{V}{V_e^{*2}} \cdot e^{-\frac{V^2}{2V_e^{*2}}}. \quad (14)$$

Из (1) и (14) следует, что в идеальном газе, характеризующемся двумерной функцией распределения, количество молекул, скорость которых принадлежит интервалу с границами V и $V + dV$ (рис. 1), можно рассчитать по формуле

$$dN(V) = f^*(V)NdV = \frac{V}{V_6^{*2}} \cdot e^{-\frac{V^2}{2V_6^{*2}}} \cdot N \cdot dV. \quad (15)$$

Описание установки

В работе используется механическая модель (рис. 5), которая реализует двумерное распределение частиц по скоростям, имитирующее двумерное распределение (15). Круглая воронка 1 направляет поток частиц (крупинки пшена)

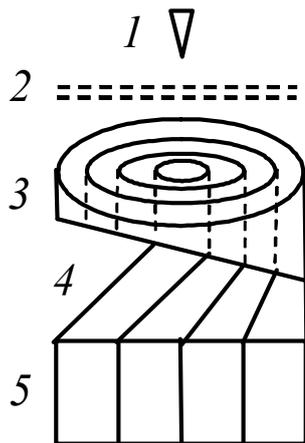


Рис. 5. Схема установки.

на ряд горизонтальных металлических сеток 2. Крупинки, просыпаясь через сетки, рассеиваются случайным образом по всем направлениям горизонтальной плоскости. Непосредственно под сетками располагаются 15 концентрических вертикальных цилиндров 3, радиусы которых равны соответственно 1, 2, 3, ..., 15 см (на рис. 5 показано 4 цилиндра). Все крупинки, попавшие в тонкий цилиндрический слой между двумя соседними цилиндрами, сыпаются по направлению 4 в соответствующую ячейку

ящика с прозрачными стенками 5. Полученное в результате этого распределение крупинки по ячейкам (рис. 6) аналогично двумерному распределению молекул по скоростям. При этом в ячейку 1 (слева на рис. 5) попадают слабо рассеянные крупинки. Чем больше номер ячейки, тем оказались дальше от центра (рис. 5 и 6), а значит, приобрели большую горизонтальную скорость попавшие в нее крупинки. Поэтому аналогом скорости молекул V здесь является номер ячейки j .

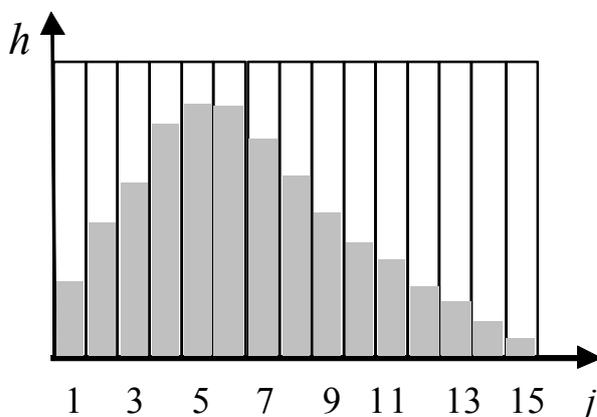


Рис. 6. Пример распределения пшена по ячейкам.

Высота h_j столбика пшена в j -ой ячейке пропорциональна количеству крупинки, получивших определенную горизонтальную скорость вследствие рассеяния сетками. Следовательно, h_j является аналогом количества молекул $dN(V)$, имеющих скорость в интервале с границами V и $V + dV$.

Удары о сетки, которые испытывают крупинки, падаю-

щие в данной установке, аналогичны соударениям молекул в газе. Поэтому уменьшение количества сеток, ведущее к уменьшению числа соударений, соответствует понижению температуры газа. Таким образом, данная установка позволяет моделировать двумерное распределение молекул газа по скоростям при разной температуре.

Измерения и их обработка

1. Проверьте правильность нумерации металлических сеток, уложенных в верхнюю часть лабораторной установки. Сетка с номером 1 должна лежать сверху, под ней — с номером 2 и далее остальные сетки в порядке возрастания номеров (всего $m_1=5$ сеток). Вставьте в верхнее отверстие установки воронку. Проверьте, правильно ли установлен ящик с прозрачными стенками в нижней части установки. Он должен плотно без зазоров прилегать к направляющим. Высыпьте пшено в воронку. После того как пшено распределится по ячейкам, измерьте высоту уровня пшена в каждой ячейке. Результаты занесите в таблицу 1.
2. Выньте из установки 2 верхние сетки, что аналогично понижению температуры исследуемого газа. Повторите действия согласно пункту 1 для числа сеток $m_2=3$.
3. Выньте из установки еще 2 сетки. Повторите действия согласно пункту 1 для числа сеток $m_3=1$.
4. Для каждого значения m постройте график-гистограмму аналогичный рис. 6.
5. На каждом графике определите номер ячейки с наибольшим уровнем. Эти номера $j_{e_1}, j_{e_2}, j_{e_3}$ являются аналогами значений наиболее вероятной скорости $V_{e_1}^*, V_{e_2}^*, V_{e_3}^*$, моделируемых при температурах T_1, T_2, T_3 .
6. С помощью данных, представленных на графиках, вычислите отношения наиболее вероятных скоростей:

$$\frac{V_{e_1}^*}{V_{e_2}^*} = \frac{j_{e_1}}{j_{e_2}}, \quad \frac{V_{e_1}^*}{V_{e_3}^*} = \frac{j_{e_1}}{j_{e_3}}. \quad (16)$$

Рассчитайте эти же отношения, используя теоретическую связь (13) между наиболее вероятной скоростью и температурой и пропорциональность температуры количеству использованных сеток m :

$$\frac{V_{e_1}^*}{V_{e_2}^*} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad \frac{V_{e_1}^*}{V_{e_3}^*} = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}. \quad (17)$$

Сопоставьте результаты расчетов по формулам (16) и (17).

7. Для распределения, полученного при использовании пяти сеток (первый столбец таблицы 1), найдите аналог суммарного количества молекул

$$h_{\Sigma} = \sum_{j=1}^{15} h_j,$$

и рассчитайте теоретические значения уровня пшена в ячейках $(h_j)_{теор}$ по формуле

$$(h_j)_{теор.} = \frac{j}{j_6^2} \cdot e^{-\frac{j^2}{2j_6^2}} \cdot h_{\Sigma}, \quad (18)$$

которая следует из (15) после замен $dN(V) \rightarrow h_j$, $V \rightarrow j$, $V_6^* \rightarrow j_6$, $dV \rightarrow 1$ и $N \rightarrow h_{\Sigma}$.

Сопоставление теоретических (18) и экспериментальных (таблица 1, столбец 1) данных представьте в виде таблицы 2.

Таблица 1

Номер ячейки j	Высота уровня $(h_j)_{эксп.}$		
	m_1	m_2	m_3
1			
·			
·			
·			
15			

Таблица 2

j	$(h_j)_{теор.}$	$(h_j)_{эксп.}$
1		
·		
·		
·		
15		

Контрольные вопросы

1. Какое свойство газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия, позволяет ввести функцию распределения молекул по скоростям?
2. С помощью формулы дайте определение функции распределения молекул газа по скоростям и поясните смысл всех используемых величин.
3. Запишите и поясните условие нормировки функции распределения молекул по скоростям и формулы для расчета средних значений, в которые входит функция распределения.
4. Опишите, как изменяется распределение Максвелла при повышении температуры (сделайте рисунок).
5. Воспользовавшись формулой (4), запишите выражение для количества молекул, скорость которых а) не превышает наиболее вероятную скорость; б) больше наиболее вероятной скорости.
6. Поясните физический смысл наиболее вероятной скорости.
7. Выведите формулы для наиболее вероятной скорости молекул, если а) свойства газа описываются распределением Максвелла; б) свойства газа описываются двумерной функцией распределения.

Литература

1. Савельев И.В., Курс общей физики, т. 1, -М.: Наука, все издания.
2. Трофимова Т.И., Курс физики, -М.: Высшая школа, все издания.