

Лабораторная работа №115

Универсальный маятник

Приборы и принадлежности: установка для определения периодов колебаний оборотного и математического маятников, стержень оборотного маятника с дисками и упорами, шарик математического маятника.

Краткая теория

Физическим маятником называется твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через его центр масс (рис.1).

Колебания маятника описываются уравнением динамики вращения

$$I\ddot{\varphi} = M_z, \quad (1)$$

где I — момент инерции маятника относительно оси z , проходящей через точку подвеса O ; φ — угол отклонения; $\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ — угловое ускорение. Для момента силы тяжести относительно оси z справедливо выражение

$$M_z = -mgL \sin \varphi, \quad (2)$$

где m — масса маятника; L — расстояние от точки подвеса до центра масс маятника, g — ускорение свободного падения.

При малых колебаниях $\sin \varphi \approx \varphi$ и с учетом (2) уравнение (1) принимает вид дифференциального уравнения гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

где величина $\omega_0^2 = \frac{mgL}{I}$ имеет смысл квадрата циклической частоты собственных колебаний маятника. Отсюда следует, что период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}. \quad (3)$$

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой, невесомой нити и совершающая колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Таким маятником можно считать небольшой тяжелый шарик массы m , подвешенный на тонкой нити, длина которой намного больше размеров шарика (рис.2). Для такого маятника момент инерции относительно оси, проходящей через точку подвеса O , определяется

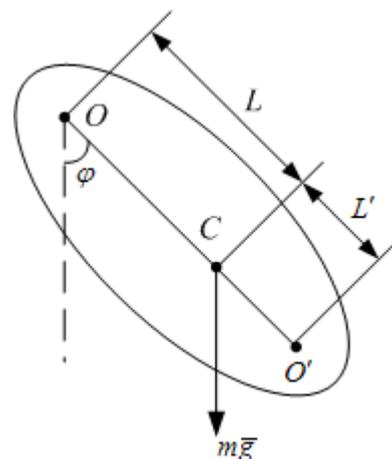


Рис. 1. Физический маятник.

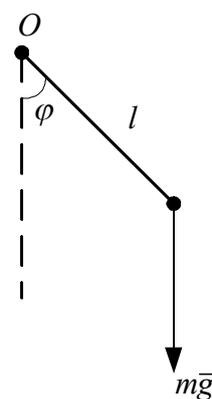


Рис. 2. Математический маятник.

выражением $I = ml^2$, а момент силы тяжести относительно этой оси имеет вид $M_z = -mgl \sin \varphi$.

Повторяя математические преобразования, сделанные для физического маятника, получим, что период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{g}}. \quad (4)$$

Сопоставляя выражения (3) и (4), видим, что физический маятник колеблется с тем же периодом, что и математический маятник, имеющий длину

$$L_{np} = \frac{I}{mL}. \quad (5)$$

Величина L_{np} называется *приведенной длиной физического маятника*.

Используя приведенную длину, выражение для периода колебаний физического маятника можно представить в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_{np}}{g}}. \quad (6)$$

Воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I = I_C + mL^2, \quad (7)$$

где I_C — момент инерции маятника относительно оси, проходящей параллельно данной через его центр масс. Выразив с ее помощью I в (5), получим, что

$$L_{np} = L + \frac{I_C}{mL}. \quad (8)$$

В данной лабораторной работе ускорение свободного падения определяется с помощью формулы (6), в которой используются измеренные значения периода колебаний и приведенной длины физического маятника, представленного на рис. 3.

Покажем, **что приведенная длина равна расстоянию между двумя точками, подвешивание в которых приводит к совпадению периодов колебаний физического маятника.**

Действительно, пусть периоды колебаний совпадают при расстояниях от точек подвеса до центра масс соответственно L и L' (рис. 1). Тогда совпадают и приведенные длины, то есть согласно (8)

$$L + \frac{I_C}{mL} = L' + \frac{I_C}{mL'}. \quad (9)$$

Сгруппируем в левой части (9) L и L' , а в правой части — слагаемые, со-

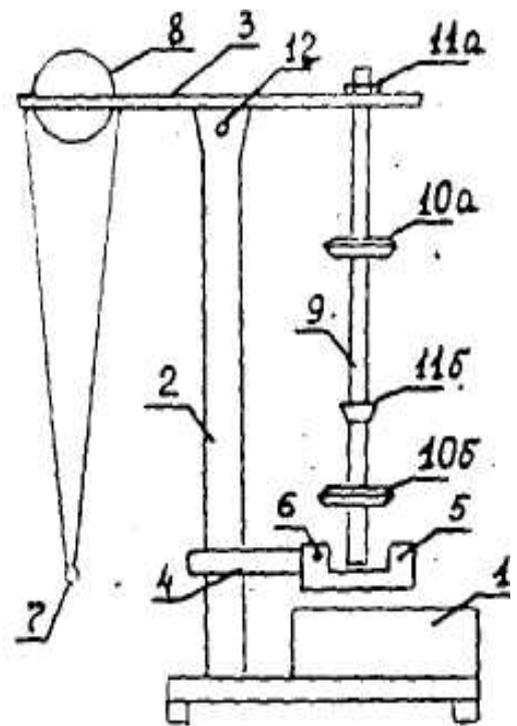


Рис. 3. Схема установки.

держачие I_C . В результате получим, что $L - L' = \frac{I_C}{m} \cdot \frac{(L - L')}{LL'}$, то есть, что

$$\frac{I_C}{m} = LL'. \quad (10)$$

Подстановка (10) в (8) приводит к искомому выражению $L_{np} = L + L'$.

Описание установки

Установка (рис.3) состоит из электронно-счетного устройства /1/, вертикальной колонки /2/, на которой установлены верхний кронштейн /3/ и нижний кронштейн /4/ с встроенным в него фотоэлектрическим датчиком. Датчик состоит из лампочки /5/ и фотодиода /6/. С одной стороны верхнего кронштейна крепится математический маятник, представляющий собой стальной шарик /7/, подвешенный на тонкой нити, длину которой можно регулировать воротком /8/. К другой стороне верхнего кронштейна может подвешиваться обратный маятник, который состоит из стального стержня /9/, двух массивных дисков /10а/ и /10б/ и двух упоров: фиксированного /11а/ и подвижного /11б/. На стержне через 10 мм нарезаны кольцевые риски. Грани ножей упоров следует совмещать с нарезанными рисками, при этом расстояние между ножами, выраженное в сантиметрах, определяется простым подсчетом делений на стержне.

Поворачивая верхний кронштейн вокруг вертикальной оси на 180° и закрепляя его винтом /12/, можно поочередно устанавливать над нижним кронштейном один из маятников. Нижний кронштейн при этом фиксируется на таком уровне, чтобы конец маятника свободно проходил между лампочкой /5/ и фотодиодом /6/.

Счетное устройство срабатывает после двукратного прерывания маятником оптической оси фотоэлектрического датчика, что соответствует одному полному колебанию маятника.

Подготовка к измерениям и техника безопасности

1. Проверить заземление прибора. Эксплуатация прибора допустима только в случае заземления.
2. Проверить вертикальность колонки и в случае необходимости произвести выравнивание прибора с помощью регулируемых ножек.
3. Включить прибор в сеть. Нажать переключатель "сеть", проверяя все ли индикаторы измерителя показывают цифру ноль и горит ли лампочка фотоэлектрического датчика.
4. Во избежание травм будьте внимательны при подвешивании тяжёлого обратного маятника.

Измерения и их обработка

1. Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника

1. Нижний кронштейн закрепите в нижней части колонки. Установите математический маятник над фотоэлектрическим датчиком. Регулируя воротком длину нити, совместите черту на шарике с чертой на корпусе фотоэлектрического датчика. По шкале на колонке определите длину маятника l и занесите её в таблицу 1.
2. Приведите в движение маятник, отклонив шарик на 4° - 5° от положения равновесия. Измерьте время t десяти полных колебаний. Отсчет начинается после нажатия кнопки "сброс" и заканчивается нажатием кнопки "стоп". (Для измерения десяти колебаний кнопку "стоп" следует нажать после появления на индикаторе цифры "9"). По формуле $T = \frac{t}{10}$ рассчитайте период колебаний маятника.
3. На данной высоте измерьте период три раза. Затем измените высоту и опять повторите измерение периода три раза. Результаты занесите в таблицу 1.
4. Для каждого периода по формуле $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ рассчитайте ускорение свободного падения.
5. Найдите \bar{g} и абсолютную погрешность его измерения $m_{\bar{g}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (g_i - \bar{g})^2}{6(6-1)}}$.

Результаты занесите в таблицу 1 и представьте в виде доверительного интервала

$$(\bar{g} \pm m_{\bar{g}}) \text{ м/с}^2.$$

Таблица I

$l, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$T_i, \text{ с}$	$g_i, \text{ м/с}^2$	$\bar{g}, \text{ м/с}^2$	$m_{\bar{g}}, \text{ м/с}^2$

2. Определение ускорения свободного падения при помощи обратного маятника

При работе с обратным маятником следует перемещать только подвижной упор /11б/, расположенный между дисками; положение дисков и фиксированного упора /11а/ не менять.

1. Поверните верхний кронштейн на 180° и подвесьте на него обратный маятник с помощью упора /11а/, находящегося вблизи свободного конца стержня. Нижний кронштейн с фотоэлектрическим датчиком закрепите таким образом, чтобы конец стержня пересекал оптическую ось датчика.
2. Отклоните маятник на 4° - 5° и отпустите его. Согласно п.2 задания 1 определите период T_a колебаний обратного маятника.
3. Снимите маятник и подвесьте его на подвижном упоре /11б/, расположенном между дисками. Нижний кронштейн переместите таким образом, чтобы конец маятника пересекал оптическую ось датчика.
4. Измерьте период T_δ колебаний маятника и сравните его с величиной T_a . Если $T_\delta > T_a$, то подвижный упор /11б/ переместите в направлении диска /10б/, находящегося на конце стержня, если же $T_\delta < T_a$ — то в направлении середины стержня.
5. Повторно измерьте период T_δ и сравните его с величиной T_a . Изменять положение подвижного упора следует до момента получения равенства периодов $T_\delta = T_a$ с точностью до 0,5%. Следите при этом, чтобы грани ножей совмещались с нарезанными рисками на стержне.
6. Определите приведенную длину обратного маятника L_{np} , подсчитывая количество делений на стержне между ножами упоров.
7. Измерение периодов T_δ и T_a повторите 3 раза. Определите средние значения \bar{T}_δ и \bar{T}_a , а также их средние квадратичные отклонения $m_{\bar{T}_a}$ и $m_{\bar{T}_\delta}$

по формулам $\bar{T} = \frac{\sum_{i=1}^3 T_i}{3}$, $m_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (T_i - \bar{T})^2}{3(3-1)}}$ и занесите их в таблицу 2.

8. Рассчитайте средний период \bar{T}_0 маятника и погрешность его определения $m_{\bar{T}_0}$:

$$\bar{T}_0 = \frac{\bar{T}_a + \bar{T}_\delta}{2}; \quad m_{\bar{T}_0} = \sqrt{\frac{1}{4} m_{\bar{T}_a}^2 + \frac{1}{4} m_{\bar{T}_\delta}^2}.$$

9. По формуле $\bar{g} = \frac{4\pi^2 L_{np}}{\bar{T}_0^2}$ вычислите величину ускорения свободного падения \bar{g} .
10. Рассчитайте относительную $\eta_{\bar{g}}$ и абсолютную $m_{\bar{g}}$ погрешности по формулам:

$$\eta_{\bar{g}} = \sqrt{\left(\frac{2m_{\bar{T}_0}}{\bar{T}_0}\right)^2 + \left(\frac{m_L}{L_{np}}\right)^2} \quad \text{и} \quad m_{\bar{g}} = \eta_{\bar{g}} \cdot \bar{g},$$

считая, что погрешность определения приведенной длины — $m_L = 0.01 \text{ м}$.

11. Результаты измерений и расчетов занесите в таблицу 2.

12. Запишите доверительный интервал $(\bar{g} \pm m_{\bar{g}}) \text{ м/с}^2$ и проверьте, попадает ли в него истинное значение ускорения свободного падения $g_0 = 9,8156 \text{ м/с}^2$.

Таблица 2

$T_a, \text{ с}$	$T_\delta, \text{ с}$	$\bar{T}_a, \text{ с}$	$m_{\bar{T}_a}, \text{ с}$	$\bar{T}_\delta, \text{ с}$	$m_{\bar{T}_\delta}, \text{ с}$	$\bar{T}_0, \text{ с}$	$m_{\bar{T}_0}, \text{ с}$	$\bar{g}, \text{ м/с}^2$	$m_{\bar{g}}, \text{ м/с}^2$

Контрольные вопросы

1. Что такое гармонические колебания, фаза колебаний?
Напишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний в общем виде.
2. Выведите уравнения движения и найдите периоды свободных колебаний физического и математического маятников.
3. Почему формулами (3) и (4) можно пользоваться только в том случае, когда амплитуды колебаний маятников малы?
4. Объясните физический смысл приведенной длины физического маятника.
5. Найдите приведенную длину и период колебаний физического маятника, представляющего собой однородный стержень длиной l и массой m , подвешенный за один из своих концов.
6. Обратный маятник, состоящий из стержня и двух дисков, подвешен за свободный конец. Один из дисков расположен на краю стержня, а другой — посередине. Считая диски материальными точками, определите момент инерции маятника относительно оси подвеса, если масса стержня равна $0,5 \text{ кг}$, его длина — 50 см , масса каждого диска — 1 кг . Рассчитайте положение центра масс маятника, его приведенную длину и период колебаний.

Литература

1. Савельев И.В., Курс общей физики, т. 1, -М.: Наука, все издания.
2. Трофимова Т.И., Курс физики, -М.: Высшая школа, все издания.
3. Веревошкин Ю.Г., Механика, -М.: МИИГАиК, 2005; §49, 56.