Лабораторная работа № 109а

Изучение закона динамики вращения твердого тела

Приборы и принадлежности: крестообразный маятник, набор грузов, секундомер, масштабная линейка, штангенциркуль.

Теория метода и описание установки

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси z описывается ***уравнением динамики вращения***

$$I\varepsilon_z = \sum_i M_{i,z} . \qquad (1)$$

Здесь $M_{i,z}$ — момент $i^{\text{-ой}}$ силы относительно оси z, ε_z — проекция углового ускорения тела на ось z, I — момент инерции тела относительно оси вращения. Как обычно направим ось z по угловой скорости вращения тела. Тогда при ускоренном вращении $\varepsilon_z = \varepsilon > 0$, а при замедленном вращении $\varepsilon_z < 0$. При этом момент силы, помогающий вращению, оказывается положительным ($M_z > 0$), а момент, мешающий вращению, — отрицательным ($M_z < 0$).

Уравнение (1) подобно второму закону Ньютона, описывающему прямолинейное движение материальной точки, траектория которой совпадает, например, с осью x. Только вместо проекции $i^{\text{-ой}}$ силы на ось x ($F_{i,x}$) здесь — $M_{i,z}$, вместо проекции линейного ускорения на ось x (a_x) — ε_z, а вместо массы m — момент инерции I.

Цель работы заключается в экспериментальной проверка уравнения (1), которое является прямым следствием второго закона Ньютона и, следовательно, представляет собой один из основных законов механики. Это делается с помощью установки, изображенной на рис.1 и получившей название ***маятника Обербека***. На ось маятника насажен двухступенчатый шкив. В шкив под прямыми углами друг к другу ввинчены 4 одинаковых стержня. На каждом стержне имеется грузик. Положение грузиков обеспечивает маятнику безразличное равновесие. На одну из ступеней шкива наматывается нить, к свободному концу которой прикреплен груз m. Сила натяжения нити, обусловленная притяжением груза к Земле, приводит маятник с неизвестным моментом инерции I во вращательное движение с угловым ускорением ε. Применительно к этому случаю уравнение (1) имеет следующий вид:

$$I\varepsilon = M - M_{тр} . \qquad (2)$$

Здесь M — абсолютная величина момента силы натяжения нити T. Перед ней в (2) поставлен знак плюс, поскольку момент силы натяжения помогает вращению. В свою очередь $M_{тр}$ — абсолютная величина неизвестного момента сил трения. Перед этим слагаемым в (2) поставлен знак минус, поскольку для сил трения, мешающих вращению, $M_z < 0$.

Силу натяжения нити T выразим из второго закона Ньютона для поступательного движения груза m:

$$ma = mg - T,$$

в соответствии с которым

$$T = m(g - a), \qquad (3)$$

где g — ускорение свободного падения. Будем считать, что груз движется с постоянным ускорением a. Тогда, измерив время t опускания груза с известной высоты H, можно вычислить его ускорение a по формуле

$$a = \frac{2H}{t^2}. \qquad (4)$$

Зная a, можно рассчитать угловое ускорение маятника

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \qquad (5)$$

где r — радиус шкива (рис. 1). Кроме того, воспользовавшись (3), можно определить и абсолютную величину момента силы натяжения нити относительно оси вращения маятника z (рис. 1):

$$M = rT = rm(g - a). \qquad (6)$$

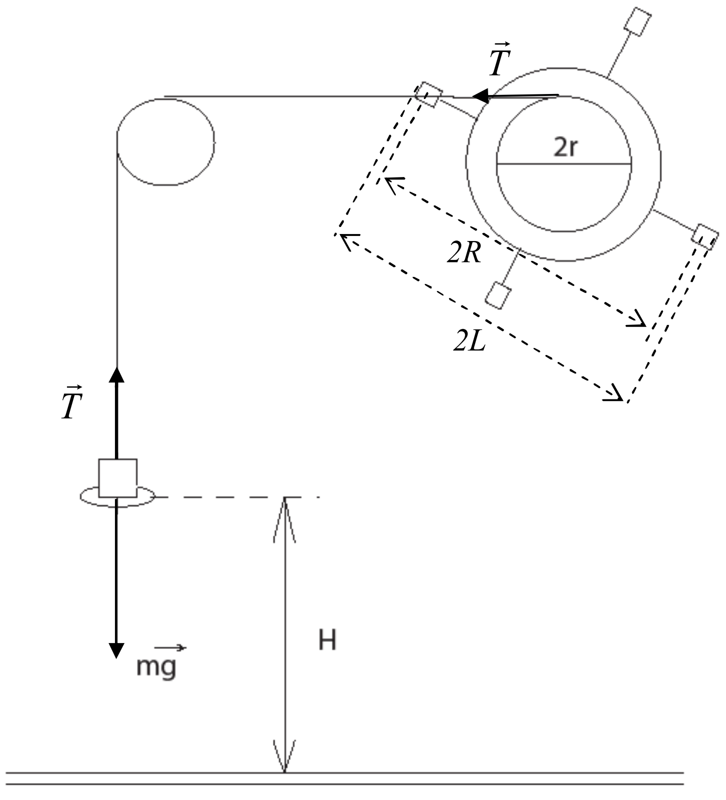

Рис. 1. Схема маятника Обербека.

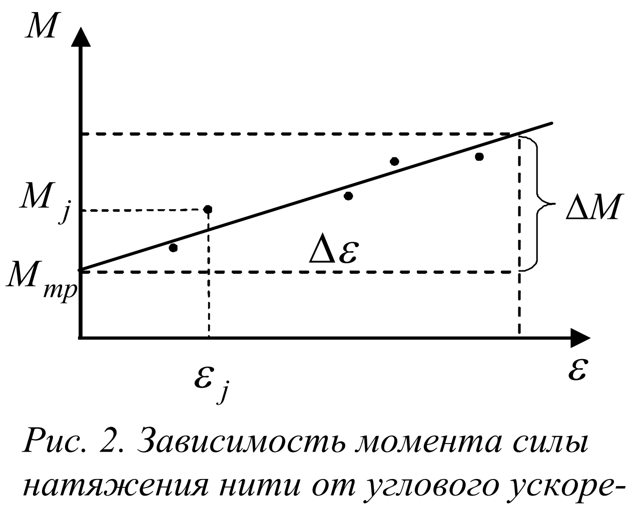

Рис. 2. Зависимость момента силы натяжения нити от углового ускорения маятника.

Согласно (2) измеренные значения момента силы натяжения нити M и углового ускорения маятника ε связаны соотношением

$$M = I\varepsilon + M_{тр}, \qquad (7)$$

которое представляет собой уравнение прямой линии, начальная ордината которой равна $M_{тр}$ (рис.2). Это означает, что для обеспечения ускоренного вращения маятника момент силы натяжения должен превосходить тормозящий момент сил трения. Кроме того, из (7) следует, что $\Delta M = I \cdot \Delta\varepsilon$, где ΔM и $\Delta\varepsilon$ соответственно изменения момента силы натяжения нити и углового ускорения маятника (рис. 2). Отсюда

$$I = \frac{\Delta M}{\Delta\varepsilon}. \qquad (8)$$

За время опускания груза массы m с высоты H маятник совершает $N = H/2\pi r$ оборотов, то есть, поворачивается на угол $\varphi = 2\pi N = H/r$. Поэтому в предположении постоянства момента сил трения, прикладываемого к оси маятника, абсолютная величина их работы

$$\left|A_{тр}\right| = M_{тр} \cdot \varphi = M_{тр}\frac{H}{r}. \qquad (9)$$

Измерения и их обработка

1. Приведя маятник в легкое вращение, убедитесь, что он находится в состоянии безразличного равновесия.
2. Измерьте штангенциркулем диаметр большого шкива $d = 2r$.
3. Укрепите груз m_1 на нити. Свободный конец нити, снабжённый узелком, закрепите (но не привязывайте) за прорезь в большом шкиве. Вращая маятник, намотайте нить и измерьте высоту груза H относительно пола. Длина нити должна быть достаточной, чтобы при ее разматывании груз m_1 достиг пола.
4. Определите время прохождения грузом m_1 расстояния H. Для этого, отпуская груз m_1, одновременно включите секундомер. При ударе груза о пол выключите секундомер и остановите маятник, удерживая его за шкив. Опыт проделайте три раза. Результаты измерений занесите в таблицу 1.

Таблица 1

H	r	m_j	№ изм.	t_i	$\bar{t}_j = \frac{\sum t_i}{3}$	$a_j = \frac{2H}{\bar{t}_j^{\,2}}$	$\varepsilon_j = \frac{a_j}{r}$	M_j	I	$M_{тр}$	$\left\|A_{тр}\right\|$
м	м	кг		с	с	м/с^2	рад/с^2	Н·м	кг·м^2	Н·м	Дж
			1								
			2								
			3								
			1								
			2								
			3								
		…	…	…	…	…	…	…			

5. Для груза m_1 вычислите среднее время опускания $\bar{t}_j$ ($j = 1$) и среднее ускорение a_j, а также соответствующее среднее угловое ускорение маятника ε_j. Затем, подставив в (6) a_j, вычислите среднее значения момента силы натяжения M_j при опускании груза m_1. Результаты занесите в таблицу 1.

6. Повторите измерения для различных 5-6 значений массы m_j и одной и той же высоты *H*. Для каждой массы сделайте расчеты подобные описанным в пункте 5. Результаты занесите в таблицу 1.

7. Постройте график аналогичный рис.2: отметьте экспериментальные точки, откладывая на оси абсцисс среднее угловое ускорение маятника ε_j при опускании $j^{\text{-го}}$ груза, а на оси ординат — среднее значение момента силы натяжения нити M_j; проведите прямую так, чтобы экспериментальные точки располагались на примерно одинаковом расстоянии как выше, так и ниже нее. По графику определите момент силы трения $M_{тр}$, а также ΔM и $\Delta\varepsilon$ (рис. 2).

8. Рассчитайте момент инерции маятника I по формуле (8) и абсолютное значение работы сил трения по формуле (9).

9. Вычислите теоретический момент инерции маятника I_T, учитывая его геометрические размеры, по формуле

$$I_T = I_0 + 4m' R^2 + 4\frac{m'' L^2}{3},$$

где I_0 — суммарный момент инерции шкива, оси и втулки крестовины; m' — масса подвижного грузика; *R* - расстояние от центра этого грузика до оси вращения маятника (рис. 1); m'' и L — масса и длина одного из четырех стержней крестовины (рис. 1). Заданные (I_0, m', m''), измеренные (*R, L*) и рассчитанные величины занесите в таблицу 2.

Таблица 2

I_0	m'	m''	L	R	$4m' R^2$	$4\frac{m'' L^2}{3}$	I_T
кг·м^2	кг	кг	м	м	кг·м^2	кг·м^2	кг·м^2

10. Определите относительное расхождение между экспериментальным I и теоретическим I_T значениями момента инерции маятника:

$$\eta = \frac{|I_T - I| \cdot 100\%}{I_T}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение момента силы относительно оси. Поясните его нахождение в данной лабораторной работе.
2. Проведите аналогию между поступательным и вращательным движениями твердого тела. Приведите соответствующие физические величины и соотношения, в которые они входят.
3. Запишите уравнение, описывающее изменение полной механической энергии для установки типа маятника Обербека.
4. Выведите формулы для моментов инерции полого цилиндра и стержня относительно их осей симметрии.

Литература

1. Савельев И.В., Курс общей физики, т. 1, -М.: Наука, все издания.
2. Трофимова Т.И., Курс физики, -М.: Высшая школа, все издания; главы 3 и 4.
3. Веревочкин Ю.Г., Механика, -М.: МИИГАиК, 2005; §45, 48, 49, 51, 54.