Лабораторная работа № 106

Определение моментов инерции тел вращения методом малых колебаний

Приборы и принадлежности: вогнутая сферическая поверхность, вогнутая цилиндрическая поверхность, шарики, сплошные и полые цилиндры, ручной секундомер, микрометр, штангенциркуль.

Теория метода и описание установки

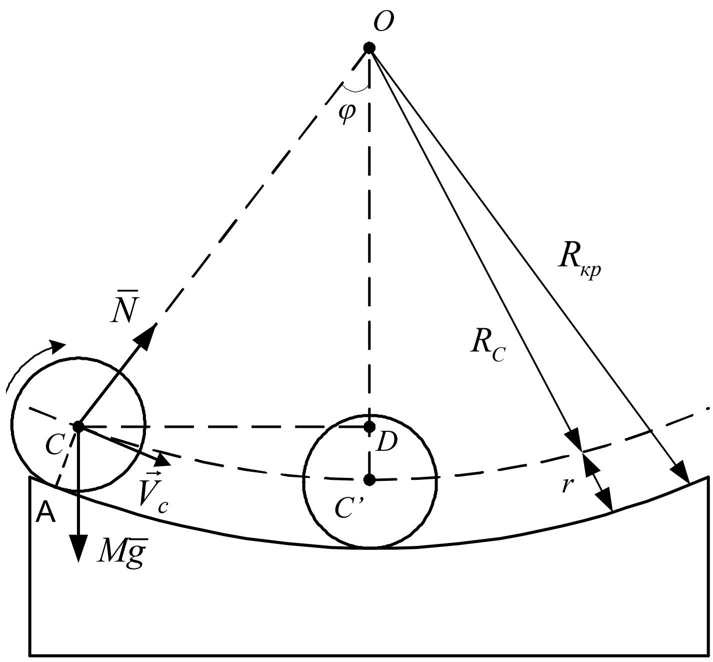

Рис. 1. Схема установки.

Тело вращения радиуса $AC = r$, помещенное на вогнутую поверхность радиуса $R_{кр}$, имеет устойчивое положение равновесия в точке траектории с минимальной потенциальной энергией (низшая точка C' на рис. 1).

Если тело вывести из равновесного положения, то оно при отсутствии сил трения будет катиться по вогнутой поверхности, совершая гармоническое колебательное движение.

Пусть угол φ определяет положение произвольной точки C траектории центра масс тела. Точка C совершает колебательное движение по дуге окружности радиусом $R_C = R_{кр} - r$.

Рассматривая движение тела как вращение с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси A, проходящей через точку касания тела и вогнутой поверхности, скорость его центра масс определим по формуле $V_c = \omega r$. С другой стороны, эту же скорость можно выразить, учитывая вращательное движение центра масс тела относительно точки O:

$$V_c = \frac{d\varphi}{dt} R_C .$$

Приравнивая оба выражения, находим:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \frac{R_C}{r} .$$

Кинетическая энергия тела равна сумме энергии вращения относительно центра масс C и кинетической энергии центра масс, то есть

$$W_K = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2}MV_c^{\ 2}, \quad (1)$$

где I — момент инерции тела относительно его центра масс.

Подставляя в (1) выражения для V_c и ω, получаем:

$$W_K = \frac{1}{2}MR_C^{\ 2}\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \qquad (2)$$

Тело массой M, находящееся на высоте H относительно положения устойчивого равновесия, обладает потенциальной энергией $W_П = MgH$. Из рис. 1 следует:

$$H = DC' = R_C - R_C\cos\varphi = 2R_C\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

При малых углах φ ($\varphi \le 10°$) — $\sin(\varphi/2) \approx \varphi/2$ (если φ выразить в радианах). Поэтому

$$W_П = MgH = MgR_C\frac{\varphi^2}{2}.$$

Будем считать, что трением качения можно пренебречь и что тело катится без проскальзывания. Тогда справедлив закон сохранения механической энергии:

$$W_K + W_П = \frac{1}{2}MR_C^2\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + MgR_C\frac{\varphi^2}{2} = const. \qquad (3)$$

Разделим обе части (3) на постоянный коэффициент при $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{g}{R_C\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)}\cdot\varphi^2 = const. \qquad (4)$$

Теперь продифференцируем (4) по времени:

$$2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \frac{g}{R_C\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)}\cdot 2\varphi\frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (5)$$

Разделив обе части уравнения (5) на $2\frac{d\varphi}{dt}$, получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{R_C\cdot(1 + \frac{I}{Mr^2})}\varphi = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (6)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R_C \cdot (1 + \frac{I}{Mr^2})}} \qquad (7)$$

— собственная циклическая частота гармонических колебаний.

Решением уравнения (6) является следующая временная зависимость углового смещения центра масс тела относительно вертикали:

$$\varphi = \varphi_A \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где φ_A — амплитуда углового смещения; а α — начальная фаза колебаний.

Используя связь периода колебаний с циклической частотой и формулу (7), получим уравнение

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\left(1 + \frac{I}{Mr^2}\right)\frac{R_C}{g}},$$

из которого выразим момент инерции тела:

$$I = Mr^2\left(\frac{gT^2}{4\pi^2 R_C} - 1\right). \qquad (8)$$

Введем обозначение

$$k = \frac{gT^2}{4\pi^2 R_C} - 1 \qquad (9)$$

и представим выражение для момента инерции (8) в виде

$$I = kMr^2. \qquad (10)$$

В данной работе коэффициенты k для простых тел вращения (шар, цилиндр) определяют экспериментально, используя формулу (9), известное значение $R_C = R_{кр} - r$ ***и измеренный период колебаний T.***

Измерения и их обработка

1. Измерьте радиусы шарика и цилиндров $r = \frac{d}{2}$ при помощи микрометра и определите погрешность m_r, которая равна цене наименьшего деления. Массы тел M, радиусы кривизны вогнутых поверхностей $R_{кр}$ и их погрешности m_M и $m_{R_{кр}}$ заданы и записаны на лабораторном стенде установки.

Для каждого тела вращения рассчитайте значение $R_C = R_{кр} - r$ и его абсолютную погрешность $m_{R_C} = \sqrt{m_{R_{кр}}^2 + m_r^2}$; вычислите величину Mr^2. Результаты занесите в таблицу 1.

2. . Определите периоды колебаний шарика на сферической поверхности, а полого и сплошного цилиндров на вогнутой цилиндрической поверхности. Для этого с помощью секундомера измерьте время t_i, затраченное на совершение n колебаний (n = 5 – 6). При этом колебания должны иметь небольшую

амплитуду, т.е. угол φ_A не должен превышать 8°-10°. Вычислите период $T_i = t_i/n$.

Опыт с каждым телом вращения проведите N = 5 – 6 раз. Рассчитайте для него среднее значение периода $\overline{T} = (\sum T_i)/N$ и абсолютную погрешность, с которой оно определено — $m_{\overline{T}} = \sqrt{(\sum (T_i - \overline{T})^2)/N(N-1)}$. Результаты занесите в таблицу 2.

Таблица 1

Тело вращения	r	m_r	$R_{кр}$	$m_{R_{кр}}$	R_C	m_{R_C}	M	m_M	Mr^2
	см	см	см	см	см	см	г	г	г·см^2

3. Для каждого тела, подставив среднее значение периода $\overline{T}$ в (9), вычислите среднее значение коэффициента $\overline{k}$, а затем по формуле

$$m_{\overline{k}} = (\overline{k}+1)\sqrt{\left(\frac{2m_{\overline{T}}}{\overline{T}}\right)^2 + \left(\frac{m_{R_C}}{R_C}\right)^2}$$

— его абсолютную погрешность. Чтобы погрешности округления постоянных g и π существенно не влияли на k, эти константы следует брать с точностью до третьего десятичного разряда: $g = 9{,}815$ м/с^2, $\pi = 3{,}141$.

4. Вычислите экспериментальные значения моментов инерции рассматриваемых тел и абсолютные погрешности их измерения:

$$\overline{I} = \overline{k}Mr^2, \qquad m_{\overline{I}} = \overline{I}\sqrt{\left(\frac{m_{\overline{k}}}{\overline{k}}\right)^2 + \left(\frac{m_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{2m_r}{r}\right)^2}.$$

5. Рассчитайте теоретические значения моментов инерции тел вращения по формулам: $I_T = 0{,}4Mr^2$ $(k_T = 0{,}4)$ для шара, $I_T = Mr^2$ $(k_T = 1)$ для полого цилиндра и $I_T = 0{,}5Mr^2$ для сплошного цилиндра $(k_T = 0{,}5)$.

Таблица 2

Тело вращения	№ измер.	t_i	$T_i = \frac{t_i}{n}$	$\overline{T}$	$m_{\overline{T}}$	$\overline{k}$	$m_{\overline{k}}$	$\overline{I}$	$m_{\overline{I}}$	k_T	I_T
		с	с	с	с			г·см^2	г·см^2		г·см^2
	1 ... 6										

Для каждого тела результаты измерений и расчетов занесите в таблицу 2, а затем представьте в виде доверительного интервала

$$I = \bar{I} \pm m_{\bar{I}}.$$

Контрольные вопросы:

1. Выведите дифференциальное уравнение движения при гармонических колебаниях и напишите его общее решение.
2. В каких точках своей траектории колеблющееся тело обладает наибольшими значениями скорости, ускорения?
3. Для используемой лабораторной установки нарисуйте график зависимости потенциальной энергии тела вращения от его углового смещения относительно вертикали.
4. Запишите выражения для кинетической энергии тела при поступательном движении, при вращении вокруг неподвижной оси, при качении.
5. Вычислите момент инерции полого цилиндра относительно его оси симметрии.
6. Полый цилиндр и шар одинакового радиуса и массы скатываются без проскальзывания с одинаковой высоты вдоль наклонной плоскости. Сравните их кинетические энергии и скорости центров масс у основания наклонной плоскости.

Литература

1. Савельев И.В., Курс общей физики, т. 1, -М.: Наука, все издания.
2. Трофимова Т.И., Курс физики, -М.: Высшая школа, все издания; главы 3 и 4.
3. Веревочкин Ю.Г., Механика, -М.: МИИГАиК, 2005; §36, 48, 55.