Лабораторная работа № 103

Определение момента инерции крестообразного маятника.

Приборы и принадлежности**:** крестообразный маятник (маятник Обербека), два груза на длинных нитях, штангенциркуль, метровая линейка, секундомер.

Теория метода и описание установки

Моментом инерции I_i материальной точки массой Δm_i относительно оси называют произведение $\Delta m_i \cdot r_i^2$, где r_i — расстояние от материальной точки до оси.

Твёрдое тело можно рассматривать как совокупность материальных точек. Поэтому момент инерции твердого тела относительно оси равен

$$I = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$$

или в наиболее общей форме

$$I = \int r^2 \rho d\mathscr{V},$$

где ρ – плотность вещества в элементе объёма $d\mathscr{V}$, находящемся на расстоянии r от оси вращения.

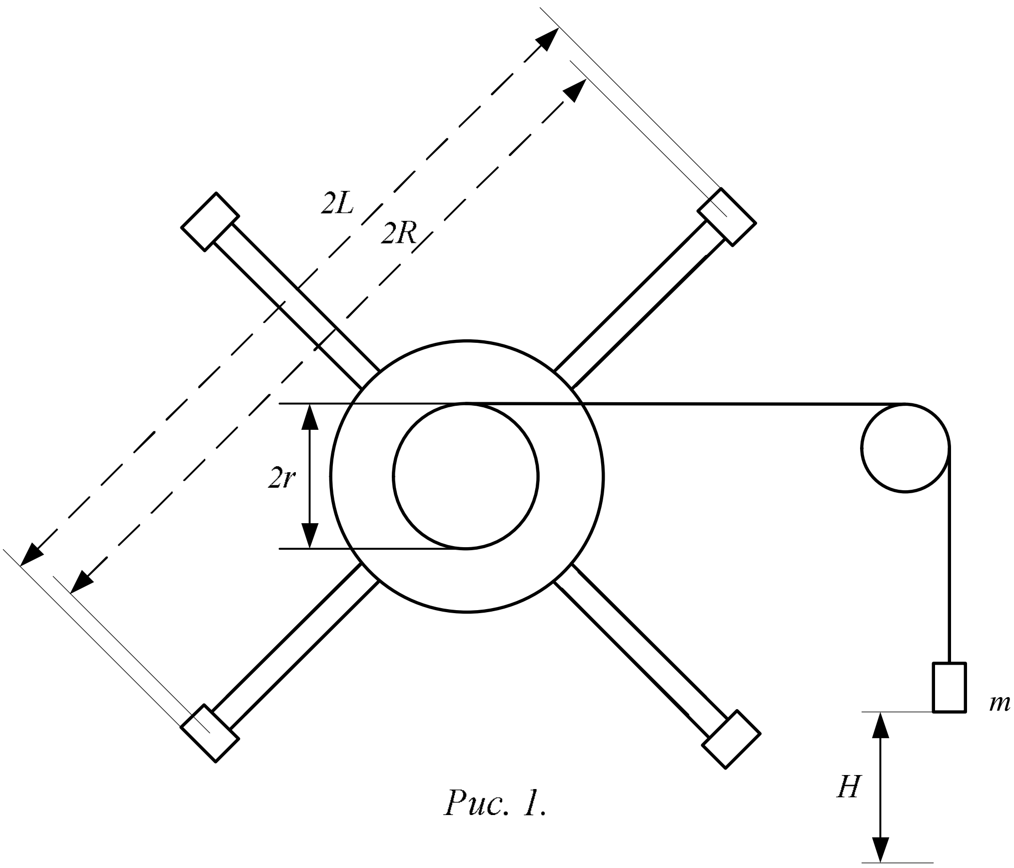

Рис. 1.

Моменты инерции однородных тел простой геометрической формы (цилиндр, шар, стержень и др.) нетрудно вычислить. Но при сложной форме поверхности, ограничивающей тело, и неравномерном распределении плотности аналитический подсчёт величины момента инерции может быть сложным. Поэтому определение моментов инерции тел сложной конфигурации, как правило, проводится опытным путём.

Целью настоящей работы является определение момента инерции крестообразного маятника, а также проверка выполнения закона сохранения и превращения энергии для лабораторной установки.

Маятник состоит из шкива и четырёх стержней, укрепленных на одной горизонтальной оси. На каждом стержне закреплено по одной шайбе одинаковой массы. Благодаря равным расстояниям шайб от оси обеспечивается состояния безразличного равновесия маятника.

Нить с прикреплённым к её концу грузом массы m поднимают на высоту H. Число оборотов, которое маятник совершит до момента касания грузом пола, можно рассчитать по формуле $N_1 = \frac{H}{2\pi r}$, где r – радиус шкива (рис. 1).

Потенциальная энергия груза массой m, поднятого на высоту H, равна $\mathrm{mg}H$. При опускании этого груза с высоты H на пол потенциальная энергия груза превращается в кинетическую энергию его поступательного движения $\frac{mV^2}{2}$, в кинетическую энергию вращающегося маятника $\frac{I\omega^2}{2}$, а также во внутреннюю энергию системы (благодаря работе, совершаемой силами трения).

Пусть A – работа, которая совершается за один оборот маятника силами трения, действующими на его ось ($A < 0$). Тогда за время опускания груза с высоты H до пола эти силы совершат работу $N_1 A$, где $N_1 = \frac{H}{2\pi r}$ — количество оборотов маятника (силы трения считаем независящими от скорости вращения маятника). Поэтому применительно к системе маятник-груз ***выражение, связывающее изменение механической энергии и работу трения,*** принимает вид

$$\left(\frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}\right) - mgH = -N_1|A|, \qquad (1)$$

где V и ω — соответственно скорость груза и угловая скорость вращения маятника непосредственно перед касанием грузом пола.

После падения груза на пол маятник по инерции будет вращаться до тех пор, пока кинетическая энергия $\frac{I\omega^2}{2}$, которую он имеет в момент касания грузом пола, не превратится во внутреннюю энергию системы. Для этого этапа ***связь изменения механической энергии системы и работы трения*** задается уравнением

$$0 - \frac{I\omega^2}{2} = -N_2|A|,$$

в котором N_2— количество оборотов маятника от момента касания грузом пола до полной остановки. Отсюда следует, что

$$|A| = \frac{I\omega^2}{2N_2}. \qquad (2)$$

Подставив уравнение (2) в уравнение (1), получим:

$$mgH = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (3)$$

Последнее слагаемое в правой части (3) показывает, какая механическая энергия из-за работы трения за время опускания груза перешла во внутреннюю энергию системы.

При сделанных предположениях маятник вращается равноускоренно, а груз опускается с постоянным ускорением a. Поэтому, если измерить время t падения груза с высоты *H*, то, используя уравнения кинематики равноускоренного движения, можно вычислить скорость груза в момент касания пола. Действительно, так как $\mathrm{H} = \frac{a\,\mathrm{t}^2}{2}$ и $\mathrm{V} = at$, то

$$V = \frac{2H}{t}. \qquad (4)$$

Если пренебречь растяжением нити, то скорость падения груза численно равна линейной скорости точек на ободе шкива. Следовательно, угловая скорость вращения крестообразного маятника равна

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{2H}{rt}, \qquad (5)$$

где r – радиус шкива.

Подставляя (4) и (5) в уравнение (3) и разрешая его относительно I, получаем:

$$I = \frac{mr^2}{1 + \frac{N_1}{N_2}} \left(\frac{gt^2}{2H} - 1 \right). \qquad (6)$$

Величины *H*, *m*, *r*, *t*, N_2, N_1, входящие в формулу (6), определяют экспериментально, а величину g считают известной с точностью до второго десятичного разряда: $g = 9{,}81$ $м/с^2$.

Измерения и их обработка

1. Измерить штангенциркулем диметр шкива *d=2r* и записать погрешность этого измерения (систематическую погрешность штангенциркуля).

2. Измерить время падения t_1 груза m_1 с высоты H_1 до пола. Для этого свободный конец нити, снабжённый узелком, закрепить (но не связывать) за прорезь в шкиве, аккуратно намотать нить на шкив, поворачивая маятник вручную и поднимая груз, привязанный к другом концу нити на высоту H_1. Включить секундомер и одновременно осторожно освободить груз, предоставляя ему возможность опускаться. Остановить секундомер в момент удара груза о пол. Провести измерения для трёх высот (H_1, H_2, H_3), различающихся на 10-15 сантиметров.
3. После падения груза на пол, концевой узелок нити должен непременно выскочить из прорези шкива. При этом маятник продолжает вращаться по инерции. Сосчитать число оборотов, которое маятник совершает от момента удара груза о пол, до своей полной остановки N_2. По полученным данным для каждой высоты H_1, H_2, H_3, вычислить соответствующие величины I_1, I_2, I_3 согласно равенству (6).
4. Провести с новым грузом m_2 аналогичные измерения и рассчитать I_4, I_5, I_6 для соответствующих высот H_4, H_5, H_6, которые могут совпадать или не совпадать с H_1, H_2, H_3. Результаты занести в таблицу 1.

Таблица 1

$2r$	m	H	t	$N_1 = \dfrac{H}{2\pi r}$	N_2	I_i	$\bar{I}$	$\left(\bar{I} - I_i\right)^2$	$m_{\bar{I}}$
м	кг	м	с			$\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$\text{кг}^2 \cdot \text{м}^4$	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$

5. Подсчитать среднее значение момента инерции $\bar{I}$ и абсолютную погрешность его измерения $m_{\bar{I}}$ по формулам

$$\bar{I} = \frac{I_1 + I_2 + \ldots + I_6}{6}, \quad m_{\bar{I}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(\bar{I} - I_i\right)^2}{6 \cdot 5}}.$$

6. Результат измерений представить в виде доверительного интервала

$$\bar{I} \pm m_{\bar{I}}.$$

7. Используя геометрические размеры маятника, рассчитать его теоретический момент инерции I_T по формуле:

$$I_T = I_0 + 4m'R^2 + 4\frac{m''L^2}{3},$$

где I_0 — суммарный момент инерции шкива, оси и втулки; m' — масса одной из четырёх подвижный шайб на крестообразном маятнике; R – расстояние от центра этой шайбы до оси вращения маятника (рис. 1); m'' и L – масса и длина одного из четырёх стрежней крестовины (рис. 1). Заданные (I_0, m'', m'), измеренные (R, L) и рассчитанные величины занести в таблицу 2.

8. Проверить, попадает ли теоретическое значение момента инерции I_T в доверительный интервал $\bar{I} \pm m_{\bar{I}}$ и пояснить результат.

Таблица 2

I_0	m'	m''	L	R	$4m'R^2$	$\frac{4}{3}m''L^2$	I_T
кг·м^2	кг	кг	м	м	кг·м^2	кг·м^2	кг·м^2

9. С помощью данных таблицы 1, полученных для одной из высот одного из грузов (одна строка), провести необходимые расчеты и заполнить таблицу3.

Таблица 3

m	H	r	t	$\frac{N_1}{N_2}$	I	$V = \frac{2H}{t}$	$\omega = \frac{V}{r}$
кг	м	м	с		кг·м^2	м/с	с$^{-1}$

10. Используя таблицу 3, проверить выполнение закона сохранения и превращения энергии, для чего слагаемые в уравнении (3) выразить в процентах по отношению к потенциальной энергии груза, принимаемой за 100%. Результаты занести в таблицу 4.

Таблица 4

mgH	$\frac{I\omega^2}{2}$	$\frac{mV^2}{2}$	$\frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{I\omega^2}{2}$
Дж	Дж	Дж	Дж
100%	%	%	%

По данным таблицы 4 найти сумму $\frac{I\omega^2}{2}+\frac{mV^2}{2}+\frac{N_1}{N_2}\cdot\frac{I\omega^2}{2}$ в процентах и сравнить со 100%. Объяснить полученный результат.

Контрольные вопросы

1. Запишите выражение, связывающее изменение полной механической энергии системы и работу неконсервативных сил. Какой вид это выражение принимает в данной лабораторной работе?
2. Запишите уравнение динамики вращения маятника Обербека.
3. Проведите аналогию между физическими величинами, характеризующими движение материальной точки и вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.
4. Как изменятся энергия вращения маятника и его момент импульса, если скорость поступательного движения груза увеличится вдвое?
5. Нарисуйте график зависимости момента импульса маятника от времени при опускании груза.

Литература

1. Савельев И.В., Курс общей физики, т. 1, -М.: Наука, все издания.
2. Трофимова Т.И., Курс физики, -М.: Высшая школа, все издания; главы 3 и 4.
3. Веревочкин Ю.Г., Механика, -М.: МИИГАиК, 2005; §32, 47, 49, 53, 54.